5.1 Matrices semblables

Définition 55 (semblables)**.**
Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ deux matrices. S'il existe une matrice $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ inversible telle que

$$B = P^{-1}AP$$

on dira que A est *semblable* à B.

Exemple

Remarques

Théorème 50. *Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres et les mêmes polynômes caractéristiques.*

Preuve

Remarques

Exemples

5.2 Diagonalisation

Pour $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, notre but est de chercher $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit égale à une matrice diagonale D :

Définition 56 (matrice diagonalisable)**.**
Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Si A est semblable à une matrice diagonale D, alors on dira qu'elle est *diagonalisable*. Dans ce cas, on aura

$$D = P^{-1}AP \text{ et } A = PDP^{-1}.$$

pour une matrice inversible $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Théorème 51 (critère de diagonalisation)**.** *Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Alors A est diagonalisable si et seulement si elle admet n vecteurs propres linéairement indépendants.*

Pratiquement :

On cherche d'abord les valeurs propres, puis les espaces propres associés. Si on obtient n vecteurs propres $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n$ linéairement indépendants, alors on peut poser

Exemples

Résumé

1. Une matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si elle admet n vecteurs propres linéairement indépendants.

2. Si A possède r valeurs propres disctinctes, alors A admet au moins r vecteurs propres linéairement indépendants.

Théorème 52. *Soit A une matrice $n\times n$. Si A possède n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable.*

Remarques

Théorème 53. *Soit* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *une matrice. Si* $p_A(\lambda)$ *admet* n *racines comptées avec leur multiplicité, alors* A *est diagonalisable si et seulement si*

Exemple

Définition 57 (multiplicité géométrique)**.**
On appelle

la *multiplicité géométrique* de la racine

Théorème 54. *Soit* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *une matrice. Si* A *est symétrique, alors elle est diagonalisable.*

5.3 Applications linéaires et valeurs propres

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ et $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par

$$T(\vec{v}) = A\vec{v}$$

pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Proposition Soit $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $C = P^{-1}AP$. Si $\mathcal{B}$ est la base de $\mathbb{R}^n$ formée des colonnes de P, alors C est la matrice qui représente T dans la base $\mathcal{B}$.

Preuve

Théorème 55. *Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable avec*

$$D = P^{-1}AP.$$

Soit $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^n$ formée des colonnes de P. Alors D est la matrice qui représente T dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple

Remarque
Si A n'est pas diagonalisable, on peut chercher à remplacer A par une matrice semblable plus simple (mais non diagonale). Pour cela, on peut compléter les vecteurs propres linéairement indépendants de A en une base de $\mathbb{R}^n$.

Considérons par exemple $A =$